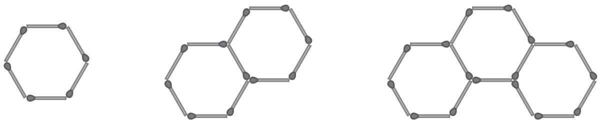
EJERCICIOS PROPUESTOS

11.1 Con cerillas se han construido las figuras.



a) ¿Cuántas cerillas se necesitan para formar una figura con 15 hexágonos?

b) ¿Cuántas cerillas se necesitan para formar una figura con *n* hexágonos?

a)

Número de hexágonos	1	2	3
Número de cerilla	6	11	16

+5 +5

$6 + 5(n - 1) = 6 + 5 \cdot 14 = 76$

b) $6 + 5(n - 1) = 5n + 1$

11.2 Halla los tres términos siguientes de cada sucesión.

a) 12, 12, 12, 12, 12 …

b) 21, 23, 25, 27, 29 …

c) 80, 70, 60, 50, 40 …

d) $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2 \ldots$

a) 12, 12, 12. Sucesión constante.
b) 31, 33, 35. Se suma 2 al término anterior.
c) 30, 20, 10. Se resta 10 al término anterior.
d) 4, 8, 16. Se multiplica por 2 el término anterior.

11.3 Encuentra el término $\square$ en cada sucesión.

a) 17, 15, 13, $\square$, 9, 7 …

b) $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{5}, \square, \frac{81}{5} \ldots$

c) 60, 56, $\square$, 48, 44, 40 …

d) 16, −8, $\square$, −2, 1 …

a) 11. Se resta 2 al término anterior.

b) $\frac{27}{5}$. Se multiplica por 3 el término anterior.

c) 52. Se resta 4 al término anterior.

d) 4. Se divide entre −2 el término anterior.

11.4 Calcula para cada sucesión los términos pedidos.

a) Los seis primeros de $a_n = \frac{n - 2}{n + 1}$

b) Los diez primeros términos de $b_n = 3(n + 1)^2 + 1$

c) c_6 y c_{20} en $c_n = n^2 - n + 3$

d) d_3 y d_{10} en $d_n = +\sqrt{n^2 - 13n + 30}$

a) $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}$

b) 13, 28, 49, 76, 109, 148, 193, 244, 301, 364

c) $c_6 = 33$; $c_{20} = 383$

d) $d_3 = 0$; $d_{10} = 0$

11.5 **Construye la sucesión recurrente definida por:**

$a_1 = -2 \qquad a_n = a_{n-1} + 5$

$-2, 3, 8, 13, 18, 23\ldots$

11.6 **Forma la sucesión recurrente dada por:**

$a_1 = \frac{1}{16} \qquad a_n = a_{n-1} \cdot 2$

$\frac{1}{16}; \frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 4; \ldots$

11.7 **Calcula los primeros términos de la sucesión recurrente definida por:**

$a_1 = 1 \qquad a_2 = 3 \qquad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$

$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\ldots$

11.8 **Dadas las sucesiones**

$(a_n) = (2, 4, 6, 8\ \ldots)$ **y** $(b_n) = (2, 5, 8, 11\ \ldots)$

halla los cuatro primeros términos de estas sucesiones.

a) $3 \cdot (a_n)$ **b)** $(a_n) + (b_n)$ **c)** $(a_n) \cdot (b_n)$

a) $3(a_n) = (3a_n) = (6, 12, 18, 24\ \ldots)$

b) $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) = (4, 9, 14, 19\ \ldots)$

c) $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n) = (4, 20, 48, 88\ \ldots)$

11.9 **Los términos generales de dos sucesiones son:**

$a_n = 2n + 1 \qquad b_n = 3n + 4$

a) Escribe los cuatro primeros términos de cada sucesión.

b) Halla el término general de las sucesiones $4(a_n)$; $(a_n) + (b_n)$ **y** $(a_n) \cdot (b_n)$.

a) $(a_n) = (3, 5, 7, 9\ \ldots)$

$(b_n) = (7, 10, 13, 16\ \ldots)$

b) $4 \cdot (a_n) = (4 \cdot a_n) = [4 \cdot (2n + 1)] = (8n + 4)$

$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) = (2n + 1 + 3n + 4) = (5n + 5)$

$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n) = [(2n + 1)(3n + 4)] = (6n^2 + 8n + 3n + 4) = (6n^2 + 11n + 4)$

11.10 **Halla el término general de la progresión aritmética:**

$(a_n) = (5, 2, -1, -4\ \ldots)$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 5 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 8$

11.11 **En una progresión aritmética** $a_1 = 4$ **y la diferencia es** $d = -7$**. Halla el término octavo.**

$a_8 = 4 + (8 - 1) \cdot (-7) = 4 - 7 \cdot 7 = -45$

11.12 Una ONG que se dedica a la ayuda al Tercer Mundo se inició con 125 personas.
Si todos los meses se incorporan 5 voluntarios, ¿cuántas personas trabajarán en la ONG al cabo de 2 años y medio?

2 años y medio son 24 + 6 meses = 30 meses.

$a_{30} = 125 + (30 - 1) \cdot 5 = 125 + 29 \cdot 5 = 270$ voluntarios

11.13 Halla la suma de los 40 primeros términos de la progresión aritmética.

$(a_n) = (39, 36, 33, 30 \ldots)$

$a_{40} = 39 + 39 \cdot (-3) = -78$

$$S_{40} = \frac{39 - 78}{2} \cdot 40 = -780$$

11.14 El primer término de una sucesión aritmética es 1, la diferencia, 2, y la suma de los *n* primeros términos es 900. ¿Cuánto vale *n*?

$$\left.\begin{array}{l} Sn = 900 = \dfrac{1 + a_n}{2} \cdot n \\ a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1 \end{array}\right\} \quad 900 = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = n^2 \rightarrow n = 30$$

11.15 Las edades de tres hermanos están en progresión aritmética de diferencia 4 y su suma es igual a 42 años.

¿Qué edad tiene cada uno?

a_1 = edad del pequeño; a_2 = edad del mediano; a_3 = edad del mayor

$$\left.\begin{array}{l} S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \dfrac{a_1 + a_3}{2} \cdot 3 = 42 \rightarrow a_1 + a_3 = 28 \\ a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_2 = a_1 + 4;\ a_3 = a_1 + 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_1 = 10 \text{ años} \\ a_2 = 14 \text{ años} \\ a_3 = 18 \text{ años} \end{array}$$

11.16 Un ciclista recorrió el primer día 15 kilómetros y cada día aumenta su recorrido en 1 kilómetro.

¿Cuántos kilómetros habrá recorrido al cabo de los 20 primeros días?

$a_{20} = 15 + 19 \cdot 1 = 34$

$$S_{20} = \frac{15 + 34}{2} \cdot 20 = 420$$

Habrá recorrido 420 km.

11.17 Halla el término general de la progresión geométrica.

$(a_n) = (2, 6, 18, 54 \ldots)$

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

11.18 El primer término de una sucesión geométrica es $\frac{7}{3}$ y la razón es $\frac{2}{3}$. Halla el término noveno.

$$a_9 = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{9-1} = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 = 0{,}091$$

11.19 Un filántropo muy rico decidió destinar su fortuna a una asociación dedicada a la lucha contra el cáncer. Entregó 10 euros el primer mes, 20 euros el segundo, 40 euros el tercero y así sucesivamente. ¿Qué cantidad entregó a los dos años de su primera donación? (Utiliza tu calculadora.)

2 años $= 24$ meses $\Rightarrow a_{24} = 10 \cdot 2^{24-1} = 83\,886\,080$ €

11.20 Halla la suma de los 20 primeros términos de la progresión geométrica $(a_n) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27} \dots\right)$

$$a_{20} = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{20-1} = \frac{1}{3^{19}} = 8{,}6 \cdot 10^{-10} \Rightarrow S_{20} = \frac{8{,}6 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = 1{,}5$$

11.21 El primer término de una progresión geométrica es 4 y la razón es -2. Halla la suma de los diez primeros términos.

$$a_{10} = 4 \cdot (-2)^{10-1} = -2\,048 \Rightarrow S_{10} = \frac{-2\,048 \cdot (-2) - 4}{-2 - 1} = -1\,364$$

11.22 Un equipo de ciclismo programa su entrenamiento semanal en cinco etapas. En la primera etapa recorre una distancia de 40 kilómetros y cada etapa sucesiva es $\frac{5}{4}$ más larga que la anterior.
¿Cuántos kilómetros recorre el equipo a lo largo de la semana?

El kilometraje de las etapas forma una progresión geométrica de razón $r = \frac{5}{4}$.

$$a_5 = 40\left(\frac{5}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{2}\right)^5$$

$$S_5 = \frac{a_5 r - a_1}{r - 1} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^5 \cdot \frac{5}{4} - 40}{\frac{5}{4} - 1} = \frac{4(5^6 - 40 \cdot 2^7)}{2^7} = 328{,}28 \text{ km recorridos a lo largo de la semana.}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

11.23 Observa la siguiente secuencia de figuras.
¿Cuántos puntos se necesitarán para construir la figura *n*-ésima?

Orden de la figura (n)	1	2	3	4
Número de puntos (S_n)	1	3	6	10

$+2 \quad +3 \quad +4$

$a_1 = 1;\ S_1 = 1$

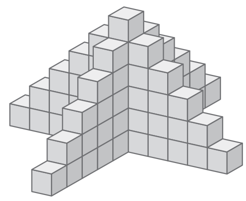
$a_2 = 2;\ S_2 = 1 + 2$

$a_3 = 3;\ S_3 = 1 + 2 + 3$

$a_4 = 4;\ S_4 = 1 + 2 + 3 + 4$

$a_n = n;\ S_n = \dfrac{1 + n}{2} \cdot n$ es el número de puntos que se necesitarán para la figura enésima.

11.24 Observa la torre de cubos de la figura.
¿Cuántos cubos se necesitan para construir una figura con 10 pisos? ¿Y una figura con *n* pisos?



Número de pisos (n)	1	2	3	4
Número de cubos (S_n)	1	6	15	28

$+5 \quad +9 \quad +13$

$S_n = S_{n-1} + a_n$

$n = 2 \rightarrow S_2 = 6 = 1 + [4(2 - 1)]$

$n = 3 \rightarrow S_3 = 15 = 1 + [4(2 - 1)] + [1 + 4(3 - 1)]$

$n = 4 \rightarrow S_4 = 28 = 1 + [4(2 - 1)] + [1 + 4(3 - 1)] + [1 + 4(4 - 1)]$

$S_n = 1 + [4(2 - 1)] + [1 + 4(3 - 1)] + [1 + 4(4 - 1)] + \ldots + [1 + 4\ (n - 1)]$

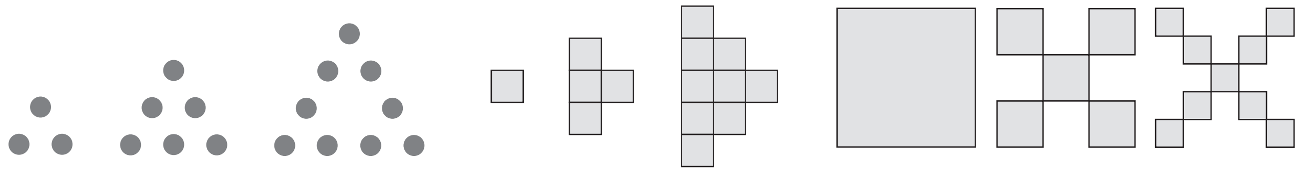
De aquí se deduce que $a_n = 1 + 4(n - 1)$.

Como $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, entonces $S_n = \dfrac{1 + 1 + 4(n - 1)}{2} \cdot n = 2n^2 - \text{n}$

Para $n = 10$, $S_{10} = 2 \cdot (10)^2 - 10 = 190$

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

11.25 Encuentra el término general de las sucesiones estudiando sus regularidades.



$a_1 = 3$ $a_2 = 6$ $a_3 = 9$ $b_1 = 1$ $b_2 = 4$ $b_3 = 9$ $c_1 = 1$ $c_2 = 5$ $c_3 = 9$

a) $a_1 = 3$; $a_2 = 6$; $a_3 = 9$; $a_4 = 12$; ...; $a_n = 3n$

b) $b_1 = 1$; $b_2 = 4$; $b_3 = 9$; $b_4 = 16$; ...; $b_n = n^2$

c) $c_1 = 1$; $c_2 = 5$; $c_3 = 9$; $c_4 = 13$; ...; $c_n = 4n - 3$

11.26 Completa el término que falta en cada sucesión.

a) 8, 10, 12, □, 16 ...

b) 35, □, 25, 20, 15 ...

c) 0, 3, □, 9, 12 ...

d) $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \square, \frac{5}{81} \ldots$

a) 14   b) 30   c) 6   d) $\frac{5}{27}$

11.27 Dadas las sucesiones:

$a_n = 4n - 3$

$b_n = (-1)^n \cdot 2n$

$c_n = n^2 + 2$

a) Escribe los cinco primeros términos de cada sucesión.

b) Halla el término general de las sucesiones:

$(a_n) + (b_n)$ $3 \cdot (a_n)$ $(b_n) \cdot (c_n)$ $a_n \cdot (b_n + c_n)$

a) $a_n = 4n - 3$; $a_1 = 1$; $a_2 = 5$; $a_3 = 9$; $a_4 = 13$; $a_5 = 17$

$b_n = (-1)^n \cdot 2n$; $b_1 = -2$; $b_2 = 4$; $b_3 = -6$; $b_4 = 8$; $b_5 = -10$

$c_n = n^2 + 2$; $c_1 = 3$; $c_2 = 6$; $c_3 = 11$; $c_4 = 18$; $c_5 = 27$

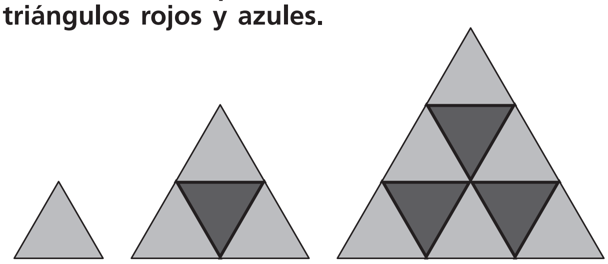
b) $a_n + b_n = 4n - 3 + (-1)^n \cdot 2n$

$3 \cdot a_n = 3 \cdot (4n - 3) = 12n - 9$

$b_n \cdot c_n = ((-1)^n \cdot 2n)(n^2 + 2) = (-1)^n \cdot 2n^3 + 2(-1)^n$

$a_n \cdot (b_n + c_n) = (4n - 3)((-1)^n \cdot 2n + n^2 + 2) = (-1)^n \cdot 8n^2 + 4n^3 + 8n - 6n \cdot (-1)^n - 3n^2 - 6$

11.28 Escribe los cinco primeros elementos de las sucesiones que determinan, respectivamente, el número de triángulos rojos y azules.



Rojos: 1, 3, 6, 10, 15   Azules: 0, 1, 3, 6, 10

11.29 Escribe los diez primeros términos de la sucesión cuyo primer término es 2 y los restantes términos se obtienen multiplicando por 5 y restándole 3 al término anterior.

$a_1 = 2$; $a_2 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$; $a_3 = 7 \cdot 5 - 3 = 32$; $a_4 = 32 \cdot 5 - 3 = 157$; $a_5 = 5 \cdot 157 - 3 = 782$; $a_6 = 5 \cdot 782 - 3 = 3\,907$; $a_7 = 5 \cdot 3\,907 - 3 = 19\,532$; $a_8 = 5 \cdot 19\,532 - 3 = 97\,657$; $a_9 = 488\,282$; $a_{10} = 2\,441\,407$

11.30 Construye las sucesiones recurrentes dadas por:

a) $a_1 = 2$; $a_n = a_{n-1} - 4$

b) $a_1 = 6$; $a_n = a_{n-1} + 2$

c) $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_n = 5a_{n-1} - a_{n-2}$

d) $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 3$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

a) 2, −2, −6, −10, −14, −18 …

b) 6, 8, 10, 12, 14, 16 …

c) 2, 3, 13, 62, 297, 1 423, 6 818 …

d) 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, 68, 125 …

Progresiones aritméticas

11.31 Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas y, en caso afirmativo, halla el término general:

a) −8, −4, 0, 4, 8 …

b) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2} \ldots$

c) 3, 9, 27, 81, 243 …

d) 1, 1, 1, 1, 1 …

a) $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = 4 = d$. Sí es una progresión aritmética. $an = -8 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 12$

b) $b_2 - b_1 = b_3 - b_2 = \ldots = \frac{1}{2} = d$. Sí es una progresión aritmética. $bn = \frac{1}{2} + (n - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$

c) $c_2 - c_1 = 6$; $c_3 - c_2 = 18 \Rightarrow$ No es una progresión aritmética.

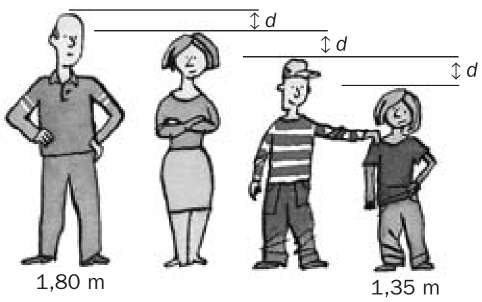
d) $d_2 - d_1 = d_3 - d_2 = \ldots = 0$. Sí es una progresión aritmética. $d_n = 1$

11.32 Halla el primer término y el término general de una progresión aritmética cuyo quinto término es 19 y la diferencia es 3.

$a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot 3 = 19 \Rightarrow a_1 = 19 - 12 = 7$

$a_n = 7 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 4$

11.33 El dibujo representa las alturas de los miembros de una familia. ¿Cuánto mide la madre?, ¿y el hijo?



La sucesión formada por las alturas de los miembros de la familia es una progresión aritmética de diferencia $d = 0{,}15$ m $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Altura de la madre = 1,65 m; Altura del hijo = 1,50 m.

11.34 Halla el primer término de la progresión aritmética cuyo término vigésimo es 100 y la suma de los 20 primeros términos es 1 050.

$$S_{20} = \frac{20 \cdot (a_1 + 100)}{2} = 1\,050 \Rightarrow 20a_1 = 100 \Rightarrow a_1 = 5$$

11.35 **Al comienzo del año, Juan decide ahorrar para comprarse una consola de videojuegos. En enero mete en su hucha 10 euros y cada mes introduce la misma cantidad que el mes anterior y 1 euro más. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado al finalizar el año?**

El año tiene 12 meses. El dinero que introduce cada mes en la hucha es una progresión aritmética de

$d = 1$; $a_1 = 10 \cdot a_{12} = 10 + (12 - 1) \cdot 1 = 21$

Dinero ahorrado $\equiv S_{12} = \dfrac{12 \cdot (10 + 21)}{2} = 6 \cdot 31 = 186$ €

11.36 **¿Cuántos términos de la progresión aritmética 4, 8, 12, 16 … hay que tomar para que el resultado de su suma sea 220?**

$a_n = 4 + (n - 1) \cdot 4 = 4n$

$S_n = \dfrac{n \cdot (4 + a_n)}{2} = 220 \Rightarrow 4n + 4n = 440 \Rightarrow 8n = 440 \Rightarrow n = 55$ es el número de términos.

11.37 **Las anotaciones obtenidas por las cinco jugadoras de un equipo de baloncesto están en progresión aritmética. Si el equipo consiguió 70 puntos y la máxima anotadora obtuvo 24 puntos, ¿cuántos puntos anotaron las restantes jugadoras?**

$S_5 = \dfrac{5 \cdot (a_1 + 24)}{2} = 70 \Rightarrow 5a_1 = 20 = a_1 = 4$

$a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot d = 24 \Rightarrow d = \dfrac{20}{4} = 5$

$a_1 = 4$; $a_2 = 9$; $a_3 = 14$; $a_4 = 19$; $a_5 = 24$ son las anotaciones de las jugadoras del equipo.

Progresiones geométricas

11.38 **Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, en caso afirmativo, halla el término general.**

a) $1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81} \ldots$

b) 1, 2, 4, 8, 16 …

c) 4, 8, 12, 16, 20 …

d) $5, 3, \dfrac{9}{5}, \dfrac{27}{25}, \dfrac{81}{125} \ldots$

a) $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \ldots = \dfrac{1}{3} = r$. Sí es una progresión geométrica; $a_n = 1 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{3^{n-1}}$

b) $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{b_3}{b_2} = \ldots = 2 = r$. Sí es una progresión geométrica; $b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

c) $\dfrac{c_2}{c_1} \neq \dfrac{c_3}{c_2} \Rightarrow$ No es una progresión geométrica.

d) $\dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{d_3}{d_2} = \ldots = \dfrac{3}{5} = r$. Sí es una progresión geométrica; $d_n = 5 \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1} = \dfrac{3^{n-1}}{5^{n-2}}$

11.39 **De una progresión geométrica sabemos que su cuarto término es $\dfrac{27}{8}$ y que la razón es $\dfrac{3}{2}$. Halla el primer término.**

$a_4 = a_1 \cdot r^3 = \dfrac{27}{8} \Rightarrow a_1 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{8} \Rightarrow a_1 = 1$

11.40 **El primer término de una progresión geométrica es 2 y la razón es 4. ¿Qué lugar ocupa en la progresión el término cuyo valor es 131 072?**

$a_n = 2 \cdot 4^{n-1} = 131\,072 \Rightarrow 4^{n-1} = 65\,536 = 4^8 \Rightarrow n - 1 = 8 \Rightarrow n = 9$

11.41 **Calcula la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica 63, 21, 7, $\frac{7}{3}$ ...**

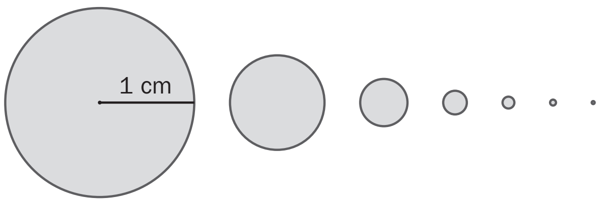
$$a_{10} = 63 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{63}{3^9} = \frac{3^2 \cdot 7}{3^9} = \frac{7}{3^7};\ S_{10} = \frac{\frac{7}{3^7} \cdot \frac{1}{3} - 63}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{413\,336}{4\,374} \approx 94{,}5$$

11.42 **El cuarto término de una progresión geométrica es 225 y la razón es 3. Halla la suma de los 8 primeros términos.**

$$a_4 = a_1 r^3 = 27a_1 = 225 \Rightarrow a_1 = \frac{25}{3};\ a_8 = a_1 r^7 = 25 \cdot 3^6 = 18\,225$$

$$S_8 = \frac{a_8 r - a_1}{r - 1} = \frac{18\,225 \cdot 3 - \frac{25}{3}}{3 - 1} = \frac{82\,000}{3} = 27\,333{,}\widehat{3}$$

11.43 **El radio de cada círculo es la mitad que el del anterior.**



Calcula:

a) El área del círculo que ocupa el quinto lugar.

b) La suma de las áreas de los 6 primeros círculos de la sucesión.

a) La sucesión de los círculos es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$; $a_5 = \pi\left(\frac{1}{2^4}\right)^2 = \frac{\pi}{2^8} = 0{,}012\ \text{cm}^2$.

b) La sucesión formada por las áreas de los círculos es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{4}$.

$$a_6 = \pi\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{\pi}{2^{10}};\ S_6 = \frac{\frac{\pi}{2^{10}} \cdot \frac{1}{2^2} - \pi}{\frac{1}{2^2} - 1} = \frac{4\pi(1 - 2^{12})}{2^{12} \cdot (-3)} = 4{,}18\ \text{cm}^2$$

11.44 **Toma un folio y dóblalo por la mitad. Obtienes dos cuartillas que juntas tendrán un grosor doble del grosor del folio. Ahora dobla nuevamente las dos cuartillas y obtienes cuatro octavillas, con un grosor cuádruple que el del folio. Si la hoja inicial tuviera un grosor de 0,1 milímetros y fuese tan grande que pudieras repetir la operación 100 veces, ¿qué grosor tendría el fajo resultante?**

$a_{100} = 0{,}1 \cdot (2)^{99} = 6{,}34 \cdot 10^{28}$ mm

CUESTIONES PARA ACLARARSE

11.45 ¿Qué nombre recibe la sucesión tal que cada término se obtiene del anterior sumándole una constante?

Aritmética.

11.46 ¿Qué nombre recibe la sucesión tal que cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por una constante?

Geométrica.

11.47 ¿La sucesión que resulta al multiplicar término a término dos progresiones geométricas es una progresión geométrica? En caso afirmativo, ¿cuál es su razón?

Sí lo es.

Sean las progresiones geométricas: $\begin{cases} a_n = a_1 r^{n-1} \\ b_n = b_1 s^{n-1} \end{cases}$ de razones r y s, respectivamente.

$a_n \cdot b_n = (a_1 \cdot b_1) \cdot (r \cdot s)^{n-1}$ es una progresión geométrica de razón $r \cdot s$.

11.48 ¿Puede existir alguna progresión geométrica que tenga todos sus términos negativos? Razona la respuesta.

Sí existe, y la condición que ha de cumplir es que el primer término de la progresión sea negativo y que la razón sea un número positivo.

Si a_1 es negativo, entonces:

$a_2 = a_1 \cdot r \Rightarrow a_2 \begin{cases} < 0 & \text{si } r > 0 \\ > 0 & \text{si } r < 0 \end{cases}$

Con r negativo, $a_3 = a_2 \cdot r$ será negativo, y así sucesivamente.

11.49 Escribe los primeros términos de la sucesión de los números pares. ¿Cuál es su término general?

2, 4, 6, 8, 10 … Su término general es $p_n = 2n$.

11.50 Escribe los primeros términos de la sucesión de los números impares. ¿Cuál es su término general?

1, 3, 5, 7, 9 … Su término general es $i_n = 2n - 1$.

11.51 Escribe los primeros términos de la sucesión suma de la sucesión de los números pares y la de los números impares. ¿Cuál es su término general?

$(p_n) = (2, 4, 6, 8, 10 \ldots)$; $(i_n) = (1, 3, 5, 7, 9 \ldots)$; $(s_n) = (p_n) + (i_n) = (3, 7, 11, 15, 19 \ldots)$

Su término general es $s_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$.

11.52 ¿Qué puede decirse de una sucesión cuyo término general se puede expresar así?:

a) $a_n = a_{n-1} + 10$

b) $a_n = a_{n-1} - 10$

c) $a_n = a_{n-1} \cdot 10$

d) $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{10}$

a) $a_n = a_{n-1} + 10 = a_{n-2} + 10 + 10 = \ldots = a_1 + (n - 1) \cdot 10$. Progresión aritmética con diferencia 10

b) $a_n = a_{n-1} - 10 = a_{n-2} - 10 - 10 = \ldots = a_1 + (n - 1) \cdot (-10)$. Progresión aritmética con diferencia -10

c) $a_n = a_{n-1} \cdot 10 = a_{n-2} \cdot 10 \cdot 10 = \ldots = a_1 \cdot (10)^{n-1}$. Progresión geométrica con razón 10

d) $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{10} = \dfrac{a_{n-2}}{10 \cdot 10} = \ldots = \dfrac{a_1}{10^{n-1}}$. Progresión geométrica con razón $\dfrac{1}{10}$

11.53 ¿Cómo es una sucesión aritmética de diferencia 0? ¿Y una progresión geométrica de razón 1?

Una sucesión aritmética de diferencia 0 es constante: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot 0 = a_1$.

Una progresión geométrica de razón 1 también es constante: $a_n = a_1 \cdot 1^{n-1} = a_1$.

11.54 ¿Cómo tiene que ser la razón de una progresión geométrica para que todos sus términos vayan cambiando alternativamente de signo?

Negativa.

11.55 Varios términos de una sucesión están en progresión aritmética. ¿Qué propiedad cumplen los términos que estén a la misma distancia del primero y del último término?

Sean los términos en progresión aritmética $a_1, a_2, ..., a_n$. Dos términos que estén a la misma distancia del primero y último término pueden ser $a_2 = a_1 + d$ y $a_{n-1} = a_n - d$.

La suma de ambos es igual a: $a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$, es decir, la suma del primero y último término.

11.56 Varios términos de una sucesión están en progresión geométrica. ¿Qué le ocurre al producto de dos términos que estén a la misma distancia del primero y del último término?

Sean los términos en progresión geométrica $a_1, a_2, ..., a_n$. Dos términos que estén a la misma distancia del primero y último término pueden ser $a_2 = a_1 \cdot r$ y $a_{n-1} = a_n : r$.

El producto de ambos es igual a: $a_1 \cdot r \cdot \frac{a_n}{r} = a_1 \cdot a_n$, es decir, el producto del primero y último término.

PROBLEMAS PARA APLICAR

11.57 Averigua la posición que ocupan los términos $\frac{8}{6}$, $\frac{71}{12}$ y $\frac{143}{16}$ en la sucesión cuyo término general es: $a_n = \frac{3n^2 - 4}{2n + 2}$.

$\frac{3n^2 - 4}{2n + 2} = \frac{8}{6} \Rightarrow 6(3n^2 - 4) = 8(2n + 2) \Rightarrow n = 2$

$\frac{3n^2 - 4}{2n + 2} = \frac{71}{12} \Rightarrow 12(3n^2 - 4) = 71(2n + 2) \Rightarrow n = 5$

$\frac{3n^2 - 4}{2n + 2} = \frac{143}{16} \Rightarrow 16(3n^2 - 4) = 143(2n + 2) \Rightarrow n = 7$

11.58 Halla el término general de una progresión aritmética de la que se conocen $a_3 = 13$ y $a_7 = 28$.

$$\begin{aligned} a_3 = 13 &\Leftrightarrow \\ a_7 = 28 &\Leftrightarrow \end{aligned} \begin{cases} a_1 + 2d = 13 \\ a_1 + 6d = 28 \end{cases} \Rightarrow 4d = 15 \Rightarrow d = \frac{15}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{11}{2}$$

El término general es: $a_n = \frac{11}{2} + (n - 1) \cdot \frac{15}{4} = \frac{7}{4} + \frac{15}{4}n$

11.59 La progresión 6, 11, 16, 21, …, 126, ¿cuántos términos tiene?

La sucesión es una progresión aritmética, ya que $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = 5 = d$.

$a_n = 6 + (n - 1) \cdot 5 = 1 + 5n = 126 \Rightarrow 5n = 125 \Rightarrow n = 25$ términos tiene la sucesión.

11.60 Halla el término general de una progresión geométrica de la que se conocen $a_2 = 12$ y $a_5 = 324$.

$$\begin{aligned} a_2 = 12 &\Leftrightarrow \\ a_5 = 324 &\Leftrightarrow \end{aligned} \begin{cases} a_1 \cdot r = 12 \Rightarrow a_1 = \frac{12}{r} \\ a_1 \cdot r^4 = 324 \end{cases} \Rightarrow \frac{12}{r} \cdot r^4 = 324 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{12}{3} = 4$$

El término general es: $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$.

11.61 Las longitudes de los lados de un triángulo están en progresión aritmética de diferencia 2 y su perímetro es de 15 centímetros.
¿Cuánto miden los lados del triángulo?

Tres términos en progresión aritmética de diferencia 2 son de la forma: a_k, $a_k + 2$, $a_k + 4$.

Perímetro $= 3a_k + 6 = 15 \Rightarrow a_k = \frac{9}{3} = 3$. Las longitudes de los lados son 3, 5 y 7.

11.62 Calcula la suma de todos los números de dos cifras que son divisibles por tres.

Los múltiplos de tres forman una progresión aritmética: $a_n = 3n$.

El primer término de 2 cifras divisible por tres es $a_4 = 12$. El último número de 2 cifras divisible por tres es $a_{33} = 99$.

La suma de los 33 primeros términos de la progresión es $S_{33} = \frac{(a_{33} + a_1) \cdot 33}{2} = \frac{(99 + 3) \cdot 33}{2} = 1\,683$.

A esta suma hay que restar la suma de los 3 primeros términos: $S_3 = 3 + 6 + 9 = 18$.

La suma pedida es $S_{33} - S_3 = 1\,683 - 18 = 1\,665$.

11.63 La suma de los términos segundo, tercero y cuarto de una progresión aritmética es 12, y la suma de sus términos tercero, cuarto y quinto es 21. Halla el primer término y la diferencia de la progresión.

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 = 12 \\ a_3 + a_4 + a_5 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 12 \\ (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a_1 + 6d = 12 \\ 3a_1 + 9d = 21 \end{cases} \Rightarrow 3d = 9 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow a_1 = -2$$

11.64 Cierta ONG ha construido un pozo para abastecer de agua potable a una población de Somalia. Su coste ha sido de 2 190 euros.

¿Qué profundidad tiene el pozo si se sabe que el primer metro costó 15 euros y cada metro restante costó 4 euros más que el anterior?

El coste de cada metro del pozo es una progresión aritmética con $a_1 = 15$ y $d = 4$.

$a_n = 15 + (n - 1) \cdot 4 = 11 + 4n$. El coste del pozo es igual a la suma de los n primeros términos de la progresión:

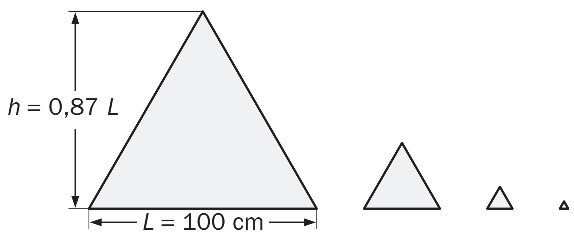
$$S_n = \frac{(11 + 4n + 15) \cdot n}{2} = 2\,190 \Leftrightarrow 26n + 4n^2 = 4\,380 \Leftrightarrow 2n^2 + 13n - 2\,190 = 0 \Rightarrow n = 30.$$

La solución negativa no tiene sentido por tratarse de una longitud. El pozo tiene 30 metros de profundidad.

11.65 La asociación de vecinos de un barrio realiza un "rastrillo" de venta de objetos usados cuya recaudación donarán a la gente necesitada del barrio. ¿Cuánto dinero recaudaron a lo largo de una semana si las recaudaciones de cada día forman una progresión geométrica de razón 2 y el primer día recaudaron 15 euros?

El último día de la semana recaudaron $a_7 = a_1 r^6 = 15 \cdot 2^6 = 960$. Para hallar cuánto recaudaron a lo largo de la semana hemos de calcular la suma de los siete primeros términos de la progresión: $S_7 = \dfrac{960 \cdot 2 - 15}{2 - 1} = 1\,905$ €.

11.66 Calcula la suma de las áreas de los cuatro triángulos equiláteros de la figura sabiendo que el lado de cada uno es tres veces menor que el siguiente triángulo.



Las áreas de los triángulos forman una progresión geométrica de razón $\frac{1}{9}$. Hallamos el área del primer triángulo.

$$a_1 = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{L \cdot 0{,}87\,L}{2} = 4\,350 \text{ cm}^2,\ a_4 = a_1 r^3 = \frac{4\,350}{9^3} \text{ cm}^2$$

La suma de las áreas es la suma de los cuatro primeros términos de la progresión:

$$S_4 = \frac{\frac{4\,350}{9^3} \cdot \frac{1}{9} - 4\,350}{\frac{1}{9} - 1} = 4\,893{,}75$$

11.67 ¿Cuál es la diferencia entre la suma de los múltiplos de 3 y la suma de los múltiplos de 5 comprendidos entre 100 y 1 000?

Los múltiplos de tres forman una progresión aritmética: $a_n = 3n$.

Los múltiplos de cinco forman una progresión aritmética: $b_n = 5n$.

Los múltiplos primero y último de tres buscados son: $a_{34} = 102$ y $a_{333} = 999$.

Los múltiplos primero y último de cinco buscados son: $b_{21} = 105$ y $b_{199} = 995$.

Las sumas de los 33 y 333 primeros múltiplos de tres son:

$$S_{33} = \frac{(99 + 3) \cdot 33}{2} = 1\,683 \quad \text{y} \quad S_{333} = \frac{(999 + 3) \cdot 333}{2} = 166\,833$$

Las sumas de los 20 y 199 primeros múltiplos de cinco son:

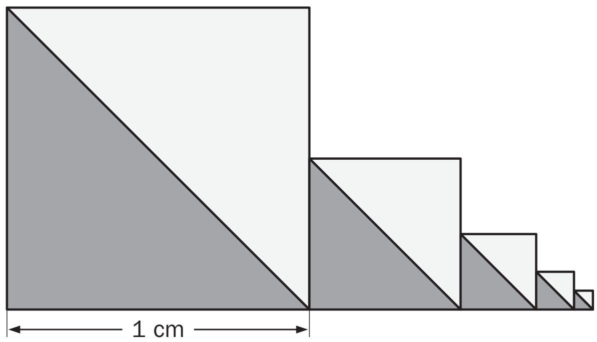
$$S_{20} = \frac{(100 + 5) \cdot 20}{2} = 1\,050 \quad \text{y} \quad S_{199} = \frac{(995 + 5) \cdot 199}{2} = 99\,500$$

La suma de los múltiplos de tres buscados: $S_{333} - S_{33} = 166\,833 - 1\,683 = 165\,150$.

La suma de los múltiplos de cinco buscados: $S_{199} - S_{20} = 99\,500 - 1\,050 = 98\,450$.

La diferencia entre los múltiplos de tres y de cinco pedida es: $165\,150 - 98\,450 = 66\,700$.

11.68 Calcula el área de la región coloreada teniendo en cuenta que el lado de cada cuadrado es la mitad del anterior.



La sucesión de los catetos de los triángulos rectángulos es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$. Por otro lado, la sucesión de las áreas de los triángulos es una progresión geométrica con $a_1 = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{4}$.

Finalmente, $a_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{2^9} \Rightarrow S_5 = \frac{a_5 r - a_1}{r - 1} = \frac{\frac{1}{2^9} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2^2} - 1} = 0{,}67 \text{ cm}^2$

11.69 Los lados de un pentágono están en progresión aritmética, el lado mayor mide 12 centímetros y el perímetro es de 40 centímetros. Calcula las longitudes de los lados del pentágono.

Los términos de la progresión aritmética son: a_k, $a_k + d$, $a_k + 2d$, $a_k + 3d$, $a_k + 4d$.

$$\begin{matrix} \textit{Perímetro} \equiv \\ \textit{Lado} \equiv \end{matrix} \begin{cases} 5a_k + 10d = 40 \\ a_k + 4d = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a_k + 20d = 60 \\ 5a_k + 10d = 40 \end{cases} \Rightarrow d = 2 = a_k = 4$$

Los lados miden 4, 6, 8, 10 y 12 cm.

11.70 **La presa de Assuán situada sobre el río Nilo, en Egipto, contiene $164 \cdot 10^9$ litros de agua el día del comienzo del verano. Teniendo en cuenta que cada día pierde el 0,2 % de su capacidad, ¿cuántos litros contendrá tras haber pasado 90 días? Utiliza la calculadora.**

Progresión geométrica de razón $r = 1 - 0{,}002$

$a_{90} = 164 \cdot 10^9 \cdot 0{,}998^{89} = 1{,}37 \cdot 10^{11}$ litros

11.71 **Interpolar *m* números entre dos números dados cualesquiera es hallar los *m* términos intermedios de una progresión aritmética cuyos primero y último término son los números dados.**

Interpola cuatro números entre el 10 y el 100.

$a_1 = 10$; $a_6 = 100 = 10 + 5 \cdot d \rightarrow d = 18$

$a_2 = 28$; $a_3 = 46$; $a_4 = 64$; $a_5 = 82$

11.72 **Interpolar *m* medios proporcionales entre dos números dados cualesquiera es hallar los *m* términos de una progresión geométrica cuyos primero y último término son los números dados.**

Interpola dos medios proporcionales entre 1 y 16.

$a_1 = 1$; $a_4 = 16 = a_1 \cdot r^3 = r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$

$a_2 = 2\sqrt[3]{2}$; $a_3 = 4\sqrt[3]{4}$

R E F U E R Z O

Sucesiones y operaciones

11.73 Escribe los siguientes cinco términos de cada sucesión.

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ ... **b)** $-4, -2, 0$ ... **c)** $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1$ ...

a) $\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$ b) 2, 4, 6, 8, 10 c) 3, 9, 27, 81, 243

11.74 Dadas las sucesiones $(a_n) = (1, 3, 5, 7 ...)$, $(b_n) = (2, 4, 6, 8 ...)$, $(c_n) = (-15, -10, -5{,}0 ...)$, halla:

a) $(a_n + b_n)$ **b)** $2 \cdot (a_n) - (c_n)$ **c)** $(a_n - c_n) \cdot (b_n)$

a) $(a_n + b_n) = 2n - 1 + 2n = 4n - 1$

b) $2 \cdot (a_n) - c_n = 2 \cdot (2n - 1) - (5n - 20) = 4n - 2 - 5n + 20 = -n + 18$

c) $(a_n - c_n) \cdot (b_n) = (2n - 1 - 5n + 20) \cdot 2n = (-3n + 19) \cdot 2n = -6n^2 + 38n$

11.75 Averigua cuál es el término que falta en las siguientes sucesiones.

a) $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \square, \frac{16}{3}, \frac{32}{3}$ ...

b) $-9, -6, -3, \square, 3$ ...

c) $27, -9, \square, -1, \frac{1}{3}$ ...

d) $\square, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$ ...

a) $\frac{8}{3}$ b) 0 c) 3 d) 1

11.76 Determina si los números $1, \frac{1}{2}, \frac{8}{5}, \frac{11}{7}$ son términos de la sucesión de término general $a_n = \frac{3n - 1}{n + 3}$.

$\frac{3n - 1}{n + 3} = 1 \Rightarrow 3n - 1 = n + 3 \Rightarrow n = 2$. Sí, es el segundo término.

$\frac{3n - 1}{n + 3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(3n - 1) = n + 3 \Rightarrow n = 1$. Sí, es el primer término.

$\frac{3n - 1}{n + 3} = \frac{8}{5} \Rightarrow n = 3$. Sí, es el tercer término.

$\frac{3n - 1}{n + 3} = \frac{11}{7} \Rightarrow 7(3n - 1) = 11(n + 3) \Rightarrow n = 4$. Sí, es el cuarto término.

11.77 Halla los términos primero, décimo y vigésimo de cada sucesión.

$a_n = n^2 + 1$ $b_n = \frac{3n + 2}{2n - 1}$

$a_n = n^2 + 1 \Rightarrow a_1 = 2;\ a_{10} = 101;\ a_{20} = 401$

$b_n = \frac{3n + 2}{2n - 1} \Rightarrow b_1 = 5;\ b_{10} = \frac{32}{19};\ b_{20} = \frac{62}{39}$

11.78 Calcula los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones recurrentes.

a) $a_1 = -3;\ a_n = 2a_{n-1} + 2$ **b)** $a_1 = 5;\ a_2 = -5;\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$

a) $-3, -4, -6, -10, -18, -34$ ... b) $5, -5, -25, -65, -145, -305, -625$ ...

Progresiones aritméticas y geométricas

11.79 Escribe el término general de cada progresión aritmética.

a) $-5, -1, 3, 7 \ldots$

b) $-4, \frac{-7}{2}, -3, \frac{-5}{2} \ldots$

a) $a_n - 5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 9$

b) $b_n = -4 + (n - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{-9 + n}{2}$

11.80 El sexto término de una progresión aritmética es 6, y la diferencia es igual a 3. Calcula:

a) El valor del primer término de la progresión.

b) La suma de los 10 primeros términos.

a) $a_6 + a_1 + 5d \Rightarrow 6 = a_1 + 5 \cdot 3 \Rightarrow a_1 = 6 - 15 \Rightarrow a_1 = -9$

b) $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(-9 + 18) \cdot 10}{2} = 45$

11.81 El número de donantes de sangre en un hospital el primer día de cierto mes fue de 30 personas. Si cada día el número de donantes aumentó en 7 personas, ¿cuántas personas donaron sangre el último día del mes?

El número de donantes es una progresión aritmética con $a_1 = 30$ y $d = 7$. $a_{31} = a_1 + 30d = 30 + 210 = 240$

El número de donantes es la suma de los 31 primeros términos: $S_{31} = \frac{(30 + 240) \cdot 31}{2} = 4\,185$ donantes

11.82 Halla el décimo término de una progresión aritmética cuyo primer término es 4 y la suma de los 10 primeros términos es 355.

$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(4 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 355 \Rightarrow 4 + a_{10} = 71 \Rightarrow a_{10} = 67$

11.83 ¿Cuál es la suma de los múltiplos de 7 comprendidos entre 1 y 100?

Los múltiplos de siete forman una progresión aritmética: $a_n = 7n$

El primer múltiplo de siete es $a_1 = 7$.

El último múltiplo de siete menor que 100 es $a_{14} = 7 \cdot 14 = 98$.

La suma buscada es $S_{14} = \frac{(7 + 98) \cdot 14}{2} = 735$.

11.84 Halla el término general de las progresiones geométricas.

a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{75}, \frac{1}{375} \ldots$

b) $5, -1, \frac{1}{5}, \frac{-1}{25} \ldots$

a) $a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

b) $5\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1}$

11.85 **Calcula el primer término de una progresión geométrica cuyo tercer término es 192 y la razón es 8.**

$a_3 = a_1 r^2 = a_1 \cdot 8^2 = 192 \Rightarrow a_1 = \frac{192}{64} = 3$

11.86 **Halla cuánto vale la suma de los 30 primeros términos de la progresión geométrica: 1, 2, 4, 8, 16 ...**

La razón es: $r = 2 \Rightarrow a_{30} = 2^{29}$

La suma de los 30 primeros términos es: $S_{30} = \frac{2^{29} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 1\,073\,741\,823$

11.87 **El tercer término de una progresión geométrica es 144 y la razón es 6. ¿Qué posición ocupa dentro de la progresión el número 5 184?**

$a_3 = a_1 r^2 = a_1 \cdot 6^2 = 144 \Rightarrow a_1 = \frac{144}{36} = 4$

Buscamos un n que verifique: $a_n = 4 \cdot 6^{n-1} = 5\,184 \Rightarrow 6^{n-1} = 1\,296 = 6^4 \Rightarrow n - 1 = 4 \Rightarrow n = 5$

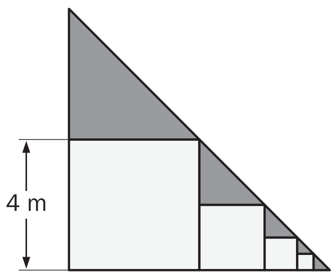
AMPLIACIÓN

11.88 Calcula $\dfrac{1 + 3 + 3^2 + ... + 3^9}{3^{10} - 1}$

El numerador es la suma de los 10 primeros términos de una progresión geométrica de razón

$$r = 3 \Rightarrow \frac{1 + 3 + 3^2 + ... + 3^9}{3^{10} - 1} = \frac{\dfrac{3^9 \cdot 3 - 1}{3 - 1}}{3^{10} - 1} = \frac{3^{10} - 1}{2(3^{10} - 1)} = \frac{1}{2}$$

11.89 Halla el área de la figura sombreada.



Los triángulos rectángulos de la figura son isósceles, con lo que los dos catetos son iguales.

La sucesión de las áreas de los triángulos rectángulos es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{4}$ y cuyo primer término es:

$$a_1 = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8; \qquad a_6 = a_1 r^5 = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{8}{4^5}$$

La suma de las áreas es igual a la suma de los seis primeros términos de la progresión:

$$S_6 = \frac{\dfrac{8}{4^5} \cdot \dfrac{1}{4} - 8}{\dfrac{1}{4} - 1} = 10{,}7 \text{ m}^2$$

11.90 Un reloj da tantas campanadas como indica la hora y además en las medias da una campanada. Halla el número de campanadas que da en un día.

La suma de las campanadas que se dan a las horas en punto es el doble de la suma de los 12 primeros términos de una progresión aritmética de diferencia 1 y primer término: $a_1 = 1$:

$$a_{12} = a_1 + 11d = 12; \; S_{12} = \frac{(1 + 12) \cdot 12}{2} = 13 \cdot 6 = 78 \Rightarrow 2 \cdot S_{12} = 2 \cdot 78 = 156 \text{ campanadas a las horas en punto.}$$

Finalmente, como se da una campanada a las medias y el día tiene 24 horas, se dan 24 campanadas a esas horas; con lo que el número total de campanadas es de $156 + 24 = 180$.

11.91 En un cuadrado se inscribe un círculo. Sobre el círculo se inscribe un cuadrado, y se repite el proceso hasta obtener 10 cuadrados y 10 círculos. Si el lado del cuadrado inicial mide 4 centímetros, calcula:

a) La suma de las áreas de los 10 círculos obtenidos.

b) La suma de las áreas de los 10 cuadrados obtenidos.

La sucesión formada por las áreas de los cuadrados es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$ y $a_1 = 16$. La sucesión formada por las áreas de los círculos es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$ y $b_1 = 4\pi$.

a) La suma de las áreas de los cuadrados es $S_{10} = \dfrac{\frac{16}{2^9} \cdot \frac{1}{2} - 16}{\frac{1}{2} - 1} \approx 31{,}97 \text{ cm}^2$

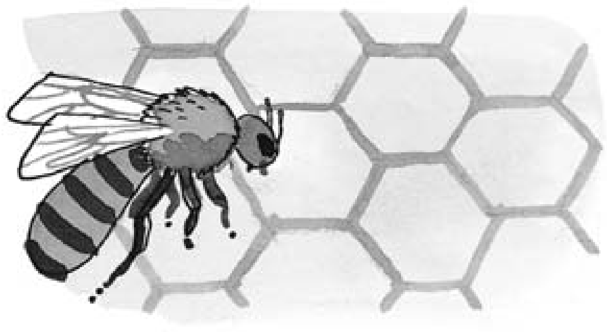
b) La suma de las áreas de los círculos es $S_{10} = \dfrac{4\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2} - 4\pi}{\frac{1}{2} - 1} \approx 25{,}11 \text{ cm}^2$

11.92 La suma de los términos primero y tercero de una progresión geométrica es 10 y la suma de los términos segundo y cuarto es 20. Calcula el primer término y la razón de la progresión.

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 10 \\ a_2 + a_4 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_1r^2 = 10 \\ a_1r + a_1r^3 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1 + r^2) = 10 \\ a_1r(1 + r^2) = 20 \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{a_1} = \frac{20}{a_1r} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow a_1 = 2$$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

11.93 Los panales



Las abejas construyen panales con formas hexagonales. El segundo hexágono que construyen lo hacen utilizando un lado del primero. A partir del tercer hexágono, lo construyen utilizando siempre dos lados de hexágonos ya construidos.

Si se entiende como unidad de cera la cantidad de este material necesaria para construir un lado de un hexágono, se verificará que:

- **Para construir un panal de una celda se necesitan 6 unidades de cera.**
- **Para construir un panal de dos celdas se necesitan 11 unidades de cera.**
- **Para construir un panal de tres celdas se necesitan 15 unidades de cera.**

¿Cuántas celdas tendrá un panal que precisa de 51 unidades de cera para su construcción?

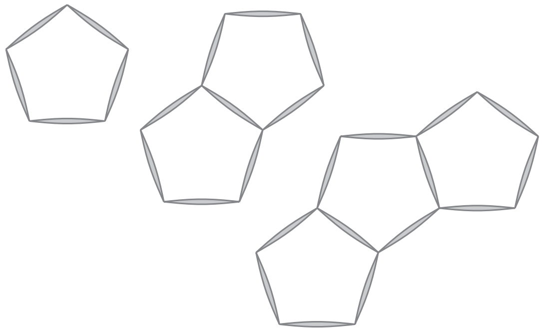
A partir de $n = 2$, un panal con n celdas precisa de $4n + 3$ unidades de cera.

$$51 = 4n + 3 \Rightarrow n = \frac{51 - 3}{4} = 12$$

Por tanto, un panal de 12 celdas precisará de 51 unidades de cera para su construcción.

AUTOEVALUACIÓN

11.A1 Construimos con palillos las siguientes figuras.



¿Cuántos palillos se necesitan para formar una figura con *n* pentágonos?

$a_1 = 5$; $a_2 = 9$; $a_3 = 13$; ...; $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 1$

11.A2 Calcula los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = 3n^3 - 4n + 2$

b) $b_n = 4 - n^2$

c) $a_1 = 5$; $a_n = -3a_{n-1} + 8$

a) 1, 18, 71, 178, 357

b) 3, 0, −5, −12, −21

c) 3, −7, 29, −79, 245

11.A3 En una progresión aritmética, el segundo término es 9 y el cuarto es 15. Calcula la suma de los 20 primeros términos.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 9 \\ a_4 = a_1 + 3d = 15 \end{cases} \Rightarrow 2d = 4 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow a_1 = 7$$

$$a_{20} = a_1 + 19d = 7 + 19 \cdot 2 = 45;\ S_{20} = \frac{(7 + 45) \cdot 20}{2} = 520$$

11.A4 En una progresión geométrica el segundo término es 12 y el quinto 324. Calcula la suma de los 8 primeros términos.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 r = 12 \\ a_5 = a_1 r^4 = 324 \end{cases} \Rightarrow r^3(a_1 r) = 324 \Rightarrow 12r^3 = 324 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow a_1 = 4$$

$$a_8 = a_1 r^7 = 4 \cdot 3^7 = 8\,748;\ S_8 = \frac{8\,748 \cdot 3 - 4}{2} = 13\,120$$

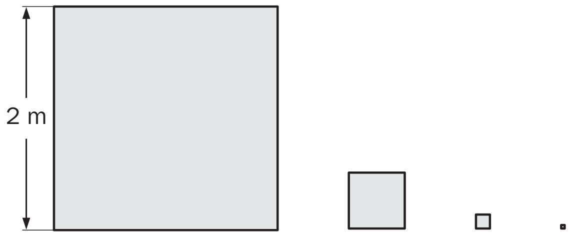
11.A5 Los ángulos de cierto triángulo rectángulo están en progresión aritmética.
Halla la medida de los ángulos.

Ya que el triángulo es rectángulo, uno de sus ángulos es de 90° y los ángulos serían: $90 - 2d$, $90 - d$, 90.

Suma $\equiv 90 - 2d + 90 - d + 90 = 180 \Rightarrow 270 - 3d = 180 \Rightarrow d = 30$

Los ángulos son: 30°, 60°, 90°.

11.A6 Halla la suma de las áreas de los cuatro cuadrados de la figura, sabiendo que el lado de cada uno es cuatro veces mayor que el del siguiente cuadrado.



Las áreas de los cuadrados forman una progresión geométrica de razón $r = \dfrac{1}{16}$ y $a_1 = 4$.

$$a_4 = a_1r^3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^3 = \frac{4}{16^3} = \frac{1}{4^5}$$

La suma de las áreas de los cuatro cuadrados es la suma de los cuatro primeros términos de la progresión geométrica:

$$S_4 = \frac{\dfrac{1}{4^5} \cdot \dfrac{1}{16} - 4}{\dfrac{1}{16} - 1} = 4{,}27 \text{ cm}^2$$

11.A7 La suma de los dos primeros términos de cierta progresión geométrica es igual a −1 y la suma de sus dos términos siguientes es igual a −4.
Calcula la suma de los primeros 6 términos de esta progresión.

$$\begin{cases} a_1 + a_1r = -1 \\ a_1r^2 + a_1r^3 = -4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1 + r) = -1 \\ a_1(r^2 + r^3) = -4 \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{1 + r} = \frac{-4}{r^2 + r^3} \Rightarrow r^3 + r^2 - 4r - 4 = 0 \Rightarrow r = -2 \text{ y } r = 2$$

($r = -1$ no da una solución coherente).

$$r = -2 \Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow a_6 = a_1r^5 = (-2)^5 = -2^5 \Rightarrow S_6 = \frac{a_6r - a_1}{r - 1} = \frac{2^6 - 1}{-3} = \frac{1 - 2^6}{3} = -21$$

$$r = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{-1}{3} \Rightarrow a_6 = a_1r^5 = \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot 2^5 \Rightarrow S_6 = \frac{a_6r - a_1}{r - 1} = \frac{1 - 2^6}{3} = -21$$

Para ambos valores de r sale la misma solución.

11.A8 La suma de las edades de cuatro hermanos es igual a 38 años y la diferencia entre el pequeño y el tercero es de 3 años. Averigua la edad de cada hermano sabiendo que las edades están en progresión aritmética.

$$a_3 - a_1 = 3 \Leftrightarrow a_1 + 2d - a_1 = 3 \Leftrightarrow 2d = 3 \Rightarrow d = 1{,}5$$

$$S_4 = 38 \Leftrightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = 4a_1 + 6d = 4a_1 + 9 = 38 \Rightarrow 4a_1 = 29 \Rightarrow a_1 = 7{,}25$$

Las edades de los cuatro hermanos son de 7,25, 8,75, 10,25 y 11,75 años.

11.A9 Calcula el número de términos de la siguiente sucesión: 7, 14, 28, 56, ..., 896.

La sucesión es una progresión geométrica, ya que: $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \ldots = 2 = r$.

$$an = a_1r^{n-1} \Leftrightarrow 896 = 7 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow 128 = 2^{n-1} \Leftrightarrow 2^7 = 2^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 7 \Rightarrow n = 8.$$

La sucesión tiene 8 términos.

11.A10 Halla el término general de una progresión aritmética cuyo tercer término es 13 y el quinto es 21.

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 13 \\ a_5 = a_1 + 4d = 21 \end{cases} \Rightarrow 2d = 8 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a_1 = 5$$

El término general buscado es: $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 1$.

11.A11 Halla el término general de una progresión geométrica que verifica que $a_2 = 15$ y $a_4 = 135$.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 r = 15 \\ a_4 = a_1 r^3 = 135 \end{cases} \Rightarrow a_1 r \cdot (r^2) \Leftrightarrow 135 \Rightarrow 15r^2 = 135 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3 \text{ y } r = -3$$

Si $r = -3 \Rightarrow a_1 = -5 \Rightarrow a_n = -5 \cdot (-3)^{n-1}$

Si $r = 3 \quad \Rightarrow a_1 = 5 \quad \Rightarrow a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$